

La théorie des jeux démystifiée

par M.T. Benhabiles, Pr

En 1928 Johannes Von Neumann publie l'article acte de naissance d'une nouvelle branche en mathématiques, la *théorie des jeux* [1]. Il part de l'observation que les mathématiques sont essentielles dans les sciences positives, physique, chimie, biologie, mais ont lamentablement échoué partout où il en a été fait appel en économie, même s'il s'agit de simples statistiques. Il médite longuement sur les raisons de cette faillite et s'engage à mathématiser l'économie, espérant que les maths aideraient à figurer rationnellement les faits économiques comme elles l'ont fait pour la physique au dix-septième siècle.

Biopic de Johannes von Neumann

Juif hongrois, après le secondaire à Budapest, il s'inscrit sur ordre paternel à ETH Zurich en chimie industrielle pour pourvoir au besoin du business familial, et la même saison il s'inscrit par vocation en mathématiques à l'université de Göttingen qui était le pôle mondial de la discipline sous le décanat de Hilbert. Von Neumann suit les deux cursus en parallèle et finit major dans les deux.

Il émigre en 1930 comme enseignant à l'université de Princeton où il démontre le théorème ergodique en probabilités, et il va réaliser prouesse sur prouesse technique. Il est l'architecte de l'ordinateur ENIAC sur lequel a été simulée la bombe atomique dans le cadre du Manhattan Project, et dans le même élan il réussit à fabriquer le détonateur de la bombe d'Hiroshima quand les savants les plus éminents ont désespéré si ce détonateur pourrait exister.

Créateur à lui seul de la théorie des jeux, il fut en conséquence une figure scientifique majeure de la guerre froide. Il désigne l'escalade nucléaire par le bacronyme MAD, mutual auto destruction, mise en exergue dans le film *Doctor Strangelove* dont il a écrit le scénario. Il parodie sa propre personne dans ce film par le conseiller germanophone du président des USA, joué par Peter Sellers.

Von Neumann séjournera au Institute of Advanced Studies à Princeton comme tous les génies de sa génération, qui comme chacun le sait n'ont pas la moindre activité durant leur séjour dans cette institution. Les savants de IAS en commun avec les profs de Princeton collent à Von Neumann le surnom *The Extraterrestrial*.

Mathématiser l'économie et les branches similaires

L'économie relève essentiellement des facteurs psychologiques et sociaux qui ne sont pas toujours rationnels. Oskar Morgenstern, économiste de renom déçu de son côté par le manque de scientifique dans l'économie, se rapproche de Von Neumann pour publier en 1944 une théorie des jeux accomplie comme modèle inédit pour l'économie [2]. Morgenstern en est l'inspirateur et Von Neumann le rédacteur. Dans ce contexte, une phrase de Morgenstern mérite annales : *Contrairement aux modèles de la physique, ceux de l'économie ont la particularité de changer le cours des choses*

Dans cet ouvrage [2] les éléments mesurables de l'économie et leurs interactions sont formalisés en variables, fonctions, équations et opérateurs mathématiques. Prudemment, les auteurs s'attaquent d'abord aux comportements humains communs et aux expériences sociales qui s'offrent naturellement à un traitement mathématique, pour progressivement parvenir à mapper en chiffres des concepts impossibles à quantifier mais qui sont d'une grande importance en économie, comme à titre indicatif la notion d'*utilité d'une marchandise* : l'utilité des souliers est égale à 15 tandis que l'utilité du béret est égale à 2, peu importe leur prix en monnaie.

Les mathématiques déployées dans ce livre s'avèrent simplistes, arithmétique élémentaire, notions de base en algèbre des ensembles, et rudiments de calcul des probabilités, mais les interprétations économiques sont très élaborées, de sorte qu'on peut lire ce livre en sautant les déductions mathématiques et en retenant uniquement les exposés verbaux qui les discutent.

Le jargon du métier

L'article géniteur [1] traite des jeux au sens pur, la théorie s'est étendue à des thèmes apparentés sans changer de nom. Un jeu est défini par "**compétition entre deux ou plusieurs parties dans le respect de règles acceptées par tous, en vue de maximiser un gain ou minimiser une perte**". Vous aurez reconnu le poker, le football, la concurrence commerciale, et même la guerre. Quand je dis ça au cours, il y a toujours une étudiante qui s'offusque "*C'est horrible d'appeler la guerre un jeu !*".

Là, il faut lever une confusion pour avancer dans le sujet : l'idée de jeu n'est pas obligatoirement associée à l'idée d'amusement, un footballeur allant à la série de tirs au but dans un match décisif est mentalement plus en guerre qu'en divertissement. Inversement, on peut s'amuser sans avoir à gagner ou perdre une mise. La même étudiante riposte "*c'est quoi les règles acceptées par tous dans une guerre ?*" je laisse votre intelligence donner la réponse.

On appelle **participant** ou **joueur** une personne physique ou morale engagée dans un jeu.

Un jeu est **à somme zéro** si le total des gains des joueurs est nul, principe des vases communicants. C'est le modèle des jeux de casino, qui impose des restrictions inadéquates aux faits économiques réels. Dans un jeu **à somme non zéro** un apport (ou déficit) de richesse peut être produit par le jeu.

Une **transaction** est un échange entre participants de biens ou de services quantifiables, c'est dans sa plus simple formulation "*Qu'est-ce que tu donnes, qu'est-ce que je donne. Qu'est-ce que tu prends, qu'est-ce que je prends*"

Une transaction peut être à 2 joueurs, ou à N-joueurs

Une transaction peut être **coopérative**, on dit aussi **négociée** : certains joueurs s'entendent pour augmenter leur part de gain, ou **non-coopérative** : aucun joueur ne veut le bien de l'autre

Une **stratégie** est un algorithme qui spécifie quel choix conforme aux règles un joueur décide pour chaque situation qu'il pourrait rencontrer au cours du jeu, exploitant l'information que les règles lui permettent d'avoir au moment du choix.

La transaction à faire ou à ne pas faire à chaque phase du jeu est commandée par la stratégie.

La stratégie est censée aider à réaliser l'objectif de maximisation du gain, elle peut changer au cours d'une même partie, mais elle n'est pas indispensable.

Cette théorie a révolutionné l'économie capitaliste qui jusque là relevait plutôt de la philosophie que d'une science rationnelle. L'idéologie dominante depuis le 17^{ème} siècle, due à Adam Smith se résume en l'expression verbale "**chacun pour soi, et une main invisible régule la finance à l'échelle macroéconomique**" qui signifie concrètement que dans une économie libérale parfaite, les actes individuels isolés, quelque soit leur envergure, n'ont pas d'effet sur l'équilibre global.

Nash mène le bal

En juin 1948, Von Neumann reçoit à Princeton George Dantzig, venu de Los Angeles lui demander conseil sur un aussi important sujet de mathématiques qu'il venait d'inventer, la *programmation linéaire*. Dantzig rend compte du meeting à Albert Tucker, professeur à Princeton, qui comprit que théorie des jeux, programmation linéaire, et réseaux électriques de Kirchhoff, ne sont qu'un seul et même sujet du point de vue formulation mathématique et méthodes potentielles de résolution.

Tucker devait encadrer un nouveau PhD, John Nash, un génie qui des plus prestigieux établissements universitaires des Etats-Unis choisit Princeton pour la bourse record qu'elle lui offrit. Les supports financiers étaient colossaux et faciles à acquérir pour ce genre de recherche. Tucker donna pour sujet à Nash la théorie des jeux qu'à peine une poignée de personnes connaissait au monde. Dans la même dynamique, Tucker encadre en 1950 Marvin Minsky qui fonde par sa thèse l'intelligence artificielle.

John Nash publie en 1950 un théorème séminal qui stipule que *dans un jeu coopératif à N joueurs, il existe au moins un point d'équilibre* [3]. C'est l'**équilibre de Nash**, défini comme une situation où chaque joueur a réalisé son meilleur score possible si aucun des joueurs ne change sa stratégie, le gain collectif est alors optimal. La preuve est basée sur le *théorème du point fixe*, un outil majeur en topologie introduit par Brouwer [4], mais Nash utilise la démonstration simplifiée de Kakutani [5].

Il est communément admis que l'équilibre de Nash est plus pertinent que les fondements classiques de l'économie libérale qui prévalaient auparavant. Il a été élargi avec succès à d'autres sujets sociologiques, notamment le processus électoral, et même à la zoologie pour expliquer le comportement des populations animales organisées. Cette théorie est toujours en progrès.

Autant le succès et l'impact de l'équilibre de Nash furent immédiats, il a fait la une du magazine *Fortune* le lendemain de sa parution, reconnaissance lui a été due très tardivement. Nash patientera jusqu'en 1994 pour obtenir le Nobel en économie. D'après sa biographe Sylvia Nasar [6], l'académie royale suédoise des sciences, plus exactement une partie de la commission du Nobel en économie durant ces décennies, bannissent la théorie abstraite et les mathématiques pures, ils disent qu'il y a la médaille Fields pour ça.

Les courants mercantiles et les politiques innovantes qui émergèrent en occident au lendemain de la deuxième guerre mondiale, et qui aboutiront à long terme à la mondialisation de l'industrie, l'ouverture de la Chine, l'essor de l'internet, ont érigé le modèle de Nash comme un standard de fait.

Kenneth Arrow, professeur à Stanford et premier Nobel en économie dans l'histoire en 1972, a connu Nash à la Rand Corporation en 1950, il découvrit les bienfaits de la théorie des jeux et dira en 1995 [6] "*Nash nous a soudain procuré un cadre dans lequel on peut poser les bonnes questions... pour ses nouveaux collègues c'était un jeune génie, le seul capable de résoudre leurs problèmes.*"

Réalités et actualité de la théorie des jeux

Cette théorie qui révèle peu sa présence au grand public a de tous temps été douçâtre et sous-terrainne, on ne soupçonne même pas qui sont ses maîtres d'œuvre. Toutefois, ses effets sont toujours percutants. Du jour au lendemain on assiste hébétés à l'effondrement mondial du communisme, les néo-calédoniens votent contre toute attente massivement pour leur rattachement à la France, les arabes déclenchent un printemps fracassant, los tacos envahissent les estomacs du genre humain...

Un cas exemplaire d'équilibre de Nash se concrétise dans le problème des admissions universitaires : N nouveaux étudiants postulent pour une inscription dans une filière universitaire qui n'offre que P places, $P < N$, son administration ignore si les postulants ont également demandé d'autres filières et lesquelles sont disposées à les inscrire. Ce problème complexe, apparu à l'aube du 20^{ème} siècle aux Etats-Unis et sujet à trop d'aléas, a été résolu en 1962 par David Gale et Lloyd Shapley (Nobel 2012 en économie) avec un algorithme centralisé d'affectation des candidats aux filières qui satisfait les deux [7]. L'algorithme prend en considération les aptitudes des candidats et leurs vœux d'inscription listés par ordre de préférence, ainsi que les quotas et critères de sélection des universités. L'optimalité de l'algorithme se réalise par : *l'inscription d'un candidat dans une filière est aussi bonne, sinon meilleure, que toute autre inscription pour laquelle il ouvre droit.*

C'est l'équilibre de Nash dans toute sa splendeur.

En 2005 le Nobel en économie honore pour la deuxième fois la théorie des jeux en récompensant Robert Aumann et Thomas Schelling pour leur concept de *point focal*. Ils définissent ainsi *une même décision prise séparément par un grand nombre d'individus qui n'ont pas de contact entre eux et qui ne disposent pas des mêmes informations*.

Ce concept, moins influentiel que l'équilibre de Nash, a des bases mathématiques solides avec confirmations expérimentales, mais il tient plus de la psycho-sociologie que des finances.

Le concept de point focal en théorie des jeux apparaît au premier degré comme un agent stabilisateur de marché, à contrario il s'est aussi avéré un agent fédérateur dans le règlement des conflits.

à l'heure où j'écris ces lignes c'est dans les sciences du langage, en linguistique, que se déploie l'application la plus criante de la théorie des jeux : l'instauration de l'anglais comme langue universelle, d'autres se leurrent en disant langue internationale, ou langue véhiculaire, ou langue touristique, ou langue pratique, ou langue technique... l'anglais est tout bonnement une langue supercherique dont l'objectif avoué est d'assoir irrémédiablement un impérialisme anglo-américain qui n'est déjà que trop encombrant.

Je termine cet exposé en mentionnant mon théorème favori en théorie des jeux, du à Von Neumann :

No war is either peace or cold war

References

- [1] J. von Neumann "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele," Mathematische Annalen, (1928) pp. 295-320.
- [2] J. von Neumann and O. Morgenstern "Theory of games and economic behavior", Princeton university press, 1944
- [3] J. Nash "Equilibrium Points in N-Person Games", Proc. of the National Academy of Sciences, 1950, pp 48-49.
- [4] L. E. Brouwer "Beweis der invarianz der dimensionenzahl". Mathematische Annalen, (1911) pp. 161-165.
- [5] S. Kakutani "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem" Duke Math. Journal, Vol. 8 (1941), pp. 457-459.
- [6] S. Nasar "A Beautiful Mind" Simon & Schuster, New York, 1998
- [7] D. Gale and L. S. Shapley "College Admissions and the Stability of Marriage" The American Mathematical Monthly, Vol. 69, No. 1 (Jan., 1962), pp. 9-15

